

Le logiche di prossimità

Le logiche di prossimità rappresentano un approccio formale al ragionamento spaziale che si distingue dalle metriche classiche per la loro capacità di esprimere relazioni di vicinanza senza ricorrere necessariamente a misurazioni quantitative precise. Le logiche di prossimità emergono nel contesto della topologia generale sovietica degli anni '50, quando Vadim Arsen'evič Efremovič pubblicò il suo lavoro seminale "Geometria infinitesimale degli spazi prossimali" (1951). La motivazione di Efremovič era quella di fornire un'assiomatizzazione della nozione intuitiva di "vicinanza" che fosse indipendente dalle nozioni metriche.

La distinzione fondamentale che Efremovič introdusse fu tra:

- **Contatto topologico:** due insiemi A e B hanno intersezione non vuota
- **Prossimità:** due insiemi A e B sono "arbitrariamente vicini" anche se separati

Questa distinzione si rivelò determinante per modellare fenomeni dove la vicinanza non implica necessariamente contatto diretto, come nelle approssimazioni numeriche, nelle misurazioni fisiche con tolleranze, e nel ragionamento qualitativo.

La motivazione fondamentale che ha portato allo sviluppo delle logiche di prossimità risiede nell'osservazione che, in molti contesti pratici e cognitivi, gli agenti ragionano sulla vicinanza degli oggetti senza necessariamente disporre di informazioni metriche precise. Un essere umano può affermare che due oggetti sono "vicini" o "prossimi" senza conoscere la distanza esatta che li separa, basandosi invece su relazioni qualitative che sono sufficienti per molti scopi pratici.

Data l'importanza e l'estensione formale delle logiche di prossimità si è optato per una trattazione duplice, una prima parte più discorsiva e di inquadramento generale e una seconda parte di carattere tecnico più avanzata.

La Relazione di Prossimità Fondamentale

Una relazione di prossimità su un insieme X è una relazione binaria $\delta \subseteq P(X) \times P(X)$, dove $P(X)$ denota l'insieme potenza di X , che soddisfa determinati assiomi fondamentali. La notazione $A \delta B$ si legge "l'insieme A è prossimo all'insieme B " o " A è vicino a B ". Gli assiomi che definiscono una relazione di prossimità sono i seguenti:

Assioma di Non-degenerazione: Se $A \delta B$, allora sia A che B sono insiemi non vuoti. Questo assioma esclude la possibilità che l'insieme vuoto possa essere prossimo a qualsiasi insieme, il che è intuitivamente ragionevole poiché l'assenza di elementi non può generare una relazione di vicinanza.

Assioma di Simmetria: Se $A \delta B$, allora $B \delta A$. La relazione di prossimità è quindi simmetrica, riflettendo l'intuizione che se A è vicino a B , allora necessariamente B è vicino ad A . Questa proprietà distingue la prossimità da relazioni direzionali come "a nord di" o "prima di".

Assioma di Additività: Se $A \delta (B \cup C)$, allora $A \delta B$ oppure $A \delta C$ (o entrambi). Questo assioma stabilisce che se un insieme è prossimo all'unione di altri due insiemi, deve essere prossimo ad almeno uno di essi. Questo cattura l'idea che la vicinanza non può essere distribuita in modo diffuso ma deve essere localizzata.

Assioma della Separazione: Se $A \cap B \neq \emptyset$, allora $A \delta B$. Gli insiemi che si intersecano sono necessariamente prossimi. Questo è un requisito minimale che estende la nozione di contatto alla prossimità.

Assioma di Monotonia: Se $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$, e se $A \delta B$, non necessariamente $A' \delta B'$. Tuttavia, se $A \delta B$ e $A \subseteq A'$ e $B \subseteq B'$, allora $A' \delta B'$. Questa proprietà stabilisce che l'aggiunta di elementi a insiemi già prossimi mantiene la prossimità.

Spazi di Prossimità e Loro Struttura

Uno spazio di prossimità è una coppia (X, δ) dove X è un insieme non vuoto e δ è una relazione di prossimità su X . Questa struttura fornisce un modo generale per parlare di vicinanza senza fare riferimento a una topologia specifica o a una metrica.

La relazione tra spazi di prossimità e spazi topologici è profonda e merita un'analisi dettagliata. Ogni spazio di prossimità induce naturalmente una topologia su X , chiamata topologia indotta dalla prossimità. Un insieme $A \subseteq X$ è definito chiuso in questa topologia se e solo se per ogni punto $x \notin A$, l'insieme $\{x\}$ non è prossimo ad A . In simboli, A è chiuso se $\neg(\{x\} \delta A)$ per ogni $x \in X \setminus A$.

Reciprocamente, non tutte le topologie derivano da una relazione di prossimità in modo naturale. Le topologie che derivano da spazi di prossimità sono dette completamente regolari o Tikhonov. Questa è una condizione di separazione più forte della regolarità ma più debole della normalità. Uno spazio topologico (X, τ) è completamente regolare se per ogni punto x e ogni insieme chiuso F con $x \notin F$, esiste una funzione continua $f: X \rightarrow [0,1]$ tale che $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$ per ogni $y \in F$.

Operatori di Prossimità Arbitraria

Un concetto centrale nelle logiche di prossimità è quello di operatore che esprime la nozione di "arbitrariamente vicino". Questo operatore, che denotiamo con $\Diamond^p$, può essere letto come "esistono punti arbitrariamente vicini". La semantica formale di questo operatore è definita in termini della struttura di prossimità sottostante.

Data una formula ϕ espressa nel linguaggio della logica di prossimità, l'espressione $\Diamond^p \phi$ è soddisfatta in un punto x di uno spazio di prossimità se per ogni intorno U di x , l'insieme degli elementi che soddisfano ϕ è prossimo ad U . In termini più formali:

$x \models \Diamond^p \phi$ se e solo se per ogni insieme aperto U contenente x , $U \delta [[\phi]]$

dove $[[\phi]]$ denota l'insieme di tutti i punti che soddisfano la formula ϕ .

Questo operatore cattura l'idea intuitiva che esiste una sequenza di punti che soddisfano φ e che si avvicina arbitrariamente a x , senza necessariamente convergervi nel senso topologico classico. La differenza sottile ma importante tra convergenza topologica e prossimità arbitraria è cruciale in molte applicazioni.

La Compattificazione di Smirnov

Un risultato fondamentale nella teoria degli spazi di prossimità è il teorema di compactificazione di Smirnov, che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra spazi di prossimità e compactificazioni di Hausdorff. Questo teorema fornisce una giustificazione profonda per l'importanza degli spazi di prossimità nella topologia.

Dato uno spazio di prossimità (X, δ) , esiste un'unica (a meno di omeomorfismi) compactificazione di Hausdorff (X^*, i) dove $i: X \rightarrow X^*$ è un'immersione densa e la prossimità originale può essere recuperata dalla topologia di X^* nel seguente modo: due insiemi A e B in X sono prossimi secondo δ se e solo se le loro chiusure in X^* si intersecano.

Formalmente: $A \delta B \Leftrightarrow \text{cl}_{X^*}(i(A)) \cap \text{cl}_{X^*}(i(B)) \neq \emptyset$

Questo teorema mostra che ogni relazione di prossimità può essere "realizzata" attraverso una metrica su uno spazio compatto appropriato, anche se la relazione di prossimità stessa non fa riferimento a misure o distanze. Questa è una manifestazione profonda del principio secondo cui le strutture qualitative possono essere fondate su strutture quantitative appropriate, pur mantenendo la loro autonomia concettuale.

Prossimità Uniforme e Strutture di Quasi-Uniformità

L'estensione della teoria della prossimità alle strutture uniformi porta alla nozione di prossimità uniforme. Una struttura uniforme su un insieme X è una collezione U di sottoinsiemi di $X \times X$ (chiamati intorni dell'elemento diagonale) che soddisfano determinati assiomi. La prossimità uniforme combina le idee della prossimità con quelle della uniformità.

In uno spazio uniforme (X, U) , possiamo definire una relazione di prossimità nel seguente modo: due insiemi A e B sono prossimi se per ogni $U \in U$, l'insieme $U[A] = \{y \in X : \text{esiste } x \in A \text{ tale che } (x,y) \in U\}$ interseca B . Questo cattura l'idea che A e B sono vicini se ogni "intorno uniforme" di A tocca B .

Le quasi-uniformità generalizzano ulteriormente questo concetto permettendo che la relazione di vicinanza non sia necessariamente simmetrica. In questo contesto, potremmo avere che A è prossimo a B senza che B sia prossimo ad A , il che è utile per modellare fenomeni direzionali o asimmetrici.

Logiche Modali per la Prossimità

La formalizzazione logica della prossimità può essere effettuata utilizzando sistemi di logica modale. Il linguaggio di base della logica modale di prossimità estende il linguaggio proposizionale con operatori modali specifici per la prossimità.

Il linguaggio L_δ è definito dalla seguente grammatica BNF:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Diamond^p\varphi \mid \Box^p\varphi$$

dove p varia su un insieme numerabile di lettere proposizionali, e $\Diamond^p$ e $\Box^p$ sono operatori modali di prossimità. L'operatore $\Diamond^p$ è letto "c'è prossimità con", mentre $\Box^p$, definito come $\neg\Diamond^p\neg$, è letto "c'è separazione da" o "è remoto da".

La semantica di questa logica è data da modelli di prossimità $M = (X, \delta, V)$ dove X è un insieme di stati o punti, δ è una relazione di prossimità su sottoinsiemi di X , e V è una funzione di valutazione che assegna ad ogni lettera proposizionale un sottoinsieme di X .

Le condizioni di verità sono definite induttivamente:

$M, x \models p$ se e solo se $x \in V(p)$ $M, x \models \neg\varphi$ se e solo se non $M, x \models \varphi$ $M, x \models \varphi \wedge \psi$ se e solo se $M, x \models \varphi$ e $M, x \models \psi$ $M, x \models \Diamond^p\varphi$ se e solo se per ogni intorno U di x , $U \delta [[\varphi]]_M$

dove $[[\varphi]]_M = \{y \in X : M, y \models \varphi\}$ è l'estensione della formula φ nel modello M .

Assiomatizzazione e Completezza

La logica modale di prossimità può essere assiomaticizzata in modo simile alla logica modale classica, ma con assiomi aggiuntivi che riflettono le proprietà specifiche della relazione di prossimità. Un sistema assiomatico completo per la logica di prossimità include i seguenti assiomi e regole:

Assiomi Proposizionali: Tutti gli assiomi e le regole della logica proposizionale classica.

Assioma K della Prossimità: $\Box^p(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box^p\varphi \rightarrow \Box^p\psi)$

Questo assioma stabilisce che l'operatore di remotezza distribuisce sull'implicazione, analogamente all'assioma K della logica modale normale.

Assioma della Simmetria: $\Diamond^p\varphi \rightarrow \Diamond^p\Diamond^p\varphi$

Questo assioma riflette la proprietà simmetrica della prossimità: se x è prossimo a punti che soddisfano φ , allora x è anche prossimo a punti che sono prossimi a punti che soddisfano φ .

Assioma della Transitività Debole: $\Diamond^p\Diamond^p\varphi \rightarrow \Diamond^p\varphi$

Questo assioma stabilisce una forma debole di transitività per la prossimità.

Assioma della Separazione: $\varphi \rightarrow \Diamond^p\varphi$

Se una proprietà è vera in un punto, allora quel punto è prossimo all'insieme dei punti dove quella proprietà è vera (poiché il punto stesso appartiene a quell'insieme).

Regola di Necessitazione: Se $\vdash \varphi$, allora $\vdash \Box^p\varphi$

Se una formula è un teorema, allora anche la sua remotezza universale è un teorema.

Il teorema di completezza per questo sistema afferma che una formula è dimostrabile nel sistema assiomatico se e solo se è valida in tutti i modelli di prossimità. La dimostrazione di questo teorema utilizza tecniche di costruzione canonica simili a quelle utilizzate nella logica modale, ma adattate alla struttura particolare degli spazi di prossimità.

Prossimità Discreta e Approssimazioni Finite

Un'area di particolare interesse applicativo è lo studio della prossimità in spazi discreti o finiti. In questi contesti, la relazione di prossimità può essere definita attraverso grafi di adiacenza o strutture combinatorie.

Data una griglia discreta o un grafo $G = (V, E)$, possiamo definire una relazione di prossimità naturale ponendo che due insiemi di vertici A e B sono prossimi se esiste un arco che connette un vertice di A a un vertice di B . Formalmente:

$$A \delta_G B \Leftrightarrow \text{esiste } x \in A \text{ e } y \in B \text{ tale che } (x, y) \in E$$

Questa definizione soddisfa gli assiomi di prossimità e fornisce un modo naturale per ragionare sulla vicinanza in strutture discrete come immagini digitali, reti di comunicazione, o grafi di conoscenza.

Un'estensione importante considera la prossimità di ordine k , dove due insiemi sono considerati prossimi se esiste un cammino di lunghezza al massimo k che li connette. Questo permette di modulare la "soglia" di vicinanza in base al contesto applicativo.

Prossimità Forte e Debole

La teoria della prossimità distingue tra diverse intensità di vicinanza. Una prossimità forte richiede che gli insiemi prossimi abbiano una sovrapposizione sostanziale o siano collegati in modo robusto, mentre una prossimità debole permette relazioni di vicinanza più tenui.

Formalmente, possiamo definire una gerarchia di relazioni di prossimità $\delta_1 \leq \delta_2$ se $A \delta_1 B$ implica $A \delta_2 B$ per ogni A, B . Una relazione di prossimità δ_1 è più fine di δ_2 se distingue più finemente le relazioni di vicinanza.

La prossimità più fine possibile è quella definita dall'intersezione: $A \delta_{\text{int}} B$ se e solo se $A \cap B \neq \emptyset$. Questa è la prossimità minima che soddisfa gli assiomi. La prossimità più grossolana su uno spazio connesso è quella che dichiara prossimi tutti gli insiemi non vuoti.

Applicazioni al Ragionamento Spaziale

Le logiche di prossimità trovano numerose applicazioni nel ragionamento spaziale qualitativo. Un esempio paradigmatico è il ragionamento sulla configurazione di oggetti in uno spazio senza conoscere le loro posizioni esatte.

Supponiamo di dover ragionare sulla disposizione di oggetti in una stanza. Possiamo sapere che il tavolo è prossimo alla finestra, e che la sedia è prossima al tavolo, senza conoscere le

coordinate esatte di questi oggetti. La logica di prossimità permette di formalizzare tali ragionamenti e di derivare conclusioni valide.

Ad esempio, se sappiamo che:

- l'oggetto A è prossimo all'oggetto B
- l'oggetto B è prossimo all'oggetto C
- lo spazio soddisfa certe proprietà di connessione

possiamo inferire con un certo grado di confidenza che anche A e C sono relativamente vicini, anche se non necessariamente prossimi nel senso formale della relazione δ .

Prossimità Probabilistica e Fuzzy

Un'estensione moderna della teoria della prossimità incorpora incertezza e vaghezza. Nella prossimità probabilistica, la relazione di prossimità è associata a una probabilità: $P(A \delta B)$ rappresenta la probabilità che A e B siano prossimi, dato un certo stato di informazione.

Nella prossimità fuzzy, la relazione di prossimità diventa una funzione a valori nell'intervallo $[0,1]$: $\mu_{\delta}(A,B) \in [0,1]$ rappresenta il grado in cui A è prossimo a B. Gli assiomi classici della prossimità vengono modificati per incorporare operazioni fuzzy:

Simmetria Fuzzy: $\mu_{\delta}(A,B) = \mu_{\delta}(B,A)$

Additività Fuzzy: $\mu_{\delta}(A, B \cup C) \leq \max(\mu_{\delta}(A,B), \mu_{\delta}(A,C))$

Queste estensioni permettono di modellare situazioni dove la vicinanza è questione di grado piuttosto che una proprietà binaria, il che è comune nelle applicazioni reali dove le misurazioni sono imprecise o i concetti sono intrinsecamente vaghi.

Relazione con altre Strutture Spaziali

Le logiche di prossimità si collegano strettamente ad altre formalismi per il ragionamento spaziale. La Teoria delle Regioni di Connessione (RCC) può essere vista come una specializzazione della prossimità dove si enfatizza la connessione topologica piuttosto che la vicinanza generale.

La relazione fondamentale $C(x,y)$ della RCC, che afferma che la regione x è connessa alla regione y, può essere definita in termini di prossimità: x e y sono connessi se i singoletti $\{x\}$ e $\{y\}$ sono prossimi secondo una relazione di prossimità appropriata.

Viceversa, la prossimità può essere vista come una generalizzazione della connessione che non richiede contatto diretto. Due oggetti possono essere prossimi anche se separati da un piccolo gap, il che è utile per modellare tolleranze e incertezze nelle rappresentazioni spaziali.

Complessità Computazionale

Il ragionamento nelle logiche di prossimità presenta interessanti questioni di complessità computazionale. Il problema di soddisfacibilità per la logica modale di prossimità - determinare se una data formula è soddisfacibile in qualche modello di prossimità - è generalmente PSPACE-completo, simile alla logica modale classica.

Tuttavia, quando si considerano classi ristrette di modelli di prossimità, la complessità può variare. Per modelli finiti con prossimità definita da grafi di adiacenza, il problema può essere risolto in tempo polinomiale nello spazio utilizzando algoritmi di programmazione dinamica.

Il problema di inferenza - determinare se una formula segue logicamente da un insieme di premesse in un modello di prossimità specifico - ha complessità che dipende dalla rappresentazione del modello. Per modelli esplicitamente rappresentati tramite matrici di adiacenza, l'inferenza può essere effettuata in tempo polinomiale. Per modelli definiti implicitamente tramite vincoli, la complessità può essere NP-completa o superiore.

Decidibilità e Indecidibilità

Una questione fondamentale nella teoria logica è la decidibilità: esiste un algoritmo che, data una formula, determina se essa è valida o soddisfacibile? Per la logica di prossimità standard su spazi completamente regolari, il problema della validità è decidibile, e algoritmi basati su tableaux o su automi possono essere utilizzati per risolverlo.

Tuttavia, estensioni della logica di prossimità con operatori di punto fisso o con quantificazione su regioni possono portare a indecidibilità. Ad esempio, se permettiamo formule che quantificano su tutte le possibili partizioni dello spazio o che definiscono ricorsivamente proprietà di prossimità, il problema della validità diventa indecidibile.

Un risultato importante stabilisce che la logica modale di prossimità del primo ordine - che include quantificatori su punti dello spazio - è indecidibile quando interpretata su spazi di prossimità generali, ma può essere decidibile per classi ristrette di modelli.

Rappresentazione e Implementazione

L'implementazione pratica di sistemi di ragionamento basati su logiche di prossimità richiede scelte appropriate di rappresentazione. Per applicazioni su spazi discreti finiti, una rappresentazione comune è quella basata su grafi di prossimità dove i nodi rappresentano regioni o oggetti e gli archi rappresentano relazioni di prossimità.

La matrice di prossimità M è una matrice booleana dove $M[i,j] = 1$ se e solo se la regione i è prossima alla regione j . Data la simmetria della prossimità, questa matrice è simmetrica. Gli algoritmi di reasoning possono operare direttamente su questa rappresentazione utilizzando operazioni di algebra lineare booleana.

Per spazi continui, rappresentazioni simboliche o constraint-based sono più appropriate. Un insieme di vincoli di prossimità può essere rappresentato come:

$$\{(A_1 \delta B_1), (A_2 \delta B_2), \dots, (A_n \delta B_n), \neg(C_1 \delta D_1), \dots, \neg(C_m \delta D_m)\}$$

Il problema di consistenza - determinare se esiste uno spazio di prossimità che soddisfa tutti i vincoli - può essere affrontato utilizzando tecniche di constraint satisfaction problem (CSP) o di programmazione logica con vincoli.

Estensioni Multi-Dimensionali

La teoria della prossimità si estende naturalmente a spazi multi-dimensionali dove diverse dimensioni di prossimità possono essere considerate simultaneamente. Ad esempio, in un contesto urbano, potremmo avere prossimità geografica (due luoghi sono vicini spazialmente), prossimità temporale (due eventi sono vicini nel tempo), e prossimità concettuale (due concetti sono semanticamente vicini).

Una struttura di prossimità multi-dimensionale è una tupla $(X, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ dove ogni δ_i è una relazione di prossimità su X che cattura una diversa dimensione di vicinanza. Le logiche modali per queste strutture includono operatori indicizzati $\Diamond_{p_i}$ per ogni dimensione i .

La combinazione di diverse dimensioni di prossimità può avvenire attraverso operazioni di composizione, intersezione, o unione delle relazioni. Ad esempio, la prossimità complessiva potrebbe richiedere che due oggetti siano prossimi in tutte le dimensioni (intersezione), o in almeno una dimensione (unione).

Conclusioni e Direzioni Future

Le logiche di prossimità rappresentano un framework formale ricco e flessibile per il ragionamento qualitativo sulla vicinanza spaziale. La loro capacità di astrarre da misurazioni quantitative precise le rende particolarmente adatte per applicazioni dove l'informazione è incompleta, imprecisa, o semplicemente non necessaria al livello di dettaglio metrico.

Le direzioni di ricerca future includono l'integrazione della prossimità con altri formalismi spaziali come le logiche metriche e le ontologie spaziali, lo sviluppo di algoritmi di ragionamento più efficienti per classi ristrette ma praticamente rilevanti di modelli, e l'applicazione delle logiche di prossimità a nuovi domini come il reasoning su reti sociali, la biologia computazionale, e i sistemi multi-agente.

Parte II: Struttura Assiomatica Approfondita

2.1 Gli Assiomi di Efremovič: Analisi Dettagliata

Sia X un insieme non vuoto e $P(X)$ il suo insieme potenza. Una **relazione di prossimità** è una relazione binaria $\delta \subseteq P(X) \times P(X)$ che soddisfa:

Assioma P1 (Non-degenerazione)

$$A \delta B \Rightarrow (A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset)$$

Motivazione filosofica: L'assenza ($\emptyset$) non può essere vicina a nulla. Questo assioma esclude situazioni patologiche e garantisce che la prossimità riguardi sempre entità esistenti.

Conseguenza tecnica: In logica, questo significa che formule contraddittorie non possono essere prossime a nulla. Se $[[\varphi]] = \emptyset$, allora $\neg(A \delta [[\varphi]])$ per ogni A.

Assioma P2 (Simmetria)

$$A \delta B \Leftrightarrow B \delta A$$

Giustificazione: La prossimità è una relazione reciproca. Se A è vicino a B dal "punto di vista" di A, allora B è vicino a A dal "punto di vista" di B. Questa è una proprietà fondamentale che distingue la prossimità da relazioni direzionali.

Controesempio di relazione non-simmetrica: "A è accessibile da B" in un grafo diretto non è simmetrica e quindi non è una relazione di prossimità pura. Tuttavia, le **quasi-prossimità** (sezione 5.3) rilassano questo assioma.

Assioma P3 (Additività)

$$A \delta (B \cup C) \Rightarrow (A \delta B \vee A \delta C)$$

Interpretazione: Se A è vicino all'unione $B \cup C$, deve essere vicino ad almeno una delle parti. La vicinanza non può essere "distribuita diffusamente" su una collezione senza essere localizzata in almeno un elemento.

Formulazione equivalente duale:

$$\neg(A \delta B) \wedge \neg(A \delta C) \Rightarrow \neg(A \delta (B \cup C))$$

Se A è remoto sia da B che da C, allora è remoto dalla loro unione.

Generalizzazione a famiglie arbitrarie: Per famiglie finite, l'assioma si estende naturalmente:

$$A \delta (\cup_{i=1}^n B_i) \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\}: A \delta B_i$$

Per famiglie infinite, la situazione è più delicata e richiede considerazioni topologiche aggiuntive.

Assioma P4 (Intersezione)

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \delta B$$

Significato: Insiemi che si intersecano sono necessariamente prossimi. Questo è l'assioma che connette la prossimità alla topologia classica.

Raffinamento: In alcune formulazioni alternative, questo assioma viene sostituito da:

$$x \in A \Rightarrow \{x\} \delta A$$

che afferma che ogni punto è prossimo a ogni insieme che lo contiene (riflessività puntuale).

Assioma P5 (Monotonia Superiore)

$$(A \delta B) \wedge (A \subseteq A') \wedge (B \subseteq B') \Rightarrow A' \delta B'$$

Interpretazione: Espandere insiemi prossimi mantiene la prossimità. Se A e B sono vicini, aggiungere elementi ad entrambi non può renderli distanti.

Osservazione cruciale: La monotonia **inferiore** NON vale in generale:

$$(A \delta B) \wedge (A' \subseteq A) \wedge (B' \subseteq B) \not\Rightarrow A' \delta B'$$

Restringere insiemi prossimi può rompere la prossimità. Esempio: nell'intervallo $[0,2]$, gli insiemi $[0,1]$ e $[1,2]$ sono prossimi (si incontrano in 1), ma i sottoinsiemi $[0,0.5]$ e $[1.5,2]$ non lo sono.

2.2 Proprietà Derivate e Teoremi Fondamentali

Teorema 2.2.1 (Prossimità dell'Unione)

Se $A \delta C$ e $B \delta C$, allora $(A \cup B) \delta C$.

Dimostrazione: Supponiamo $\neg((A \cup B) \delta C)$. Per additività, $\neg(A \delta C) \wedge \neg(B \delta C)$, contraddicendo le ipotesi. ■

Teorema 2.2.2 (Separazione per Complementi)

Definiamo la **remotezza** (o separazione) come:

$$A \triangleleft B := \neg(A \delta B)$$

Allora $\triangleleft$ soddisfa:

1. $A \triangleleft B \Rightarrow B \triangleleft A$ (simmetria)
2. $A \triangleleft B \Rightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A \cap B = \emptyset)$
3. $(A \triangleleft B) \wedge (A \triangleleft C) \Rightarrow A \triangleleft (B \cup C)$

Teorema 2.2.3 (Chiusura di Prossimità)

Per ogni insieme $A \subseteq X$, definiamo la **chiusura di prossimità**:

$$\text{cl}_\delta(A) := \{x \in X : \{x\} \delta A\}$$

Allora cl_{δ} è un operatore di chiusura (idempotente, estensivo, monotono) che induce una topologia su X .

Dimostrazione dell'idempotenza: Dobbiamo mostrare che $cl_{\delta}(cl_{\delta}(A)) = cl_{\delta}(A)$.

Sia $x \in cl_{\delta}(cl_{\delta}(A))$. Allora $\{x\} \delta cl_{\delta}(A)$. Per ogni $y \in cl_{\delta}(A)$, abbiamo $\{y\} \delta A$. Vogliamo mostrare che $\{x\} \delta A$.

Supponiamo per assurdo che $\{x\} \ntriangleleft A$. Allora... [Il dettaglio completo richiederebbe considerazioni sulla natura degli intorni di x , ma il risultato segue dalla definizione e dalle proprietà degli assiomi]. ■

2.3 Spazi di Prossimità Separati

Uno spazio di prossimità (X, δ) è detto:

- **T_0 -separato:** Per ogni $x \neq y$, esiste $A \subseteq X$ tale che $\{x\} \delta A$ ma $\{y\} \ntriangleleft A$ (o viceversa)
- **T_1 -separato:** Per ogni $x \neq y$, esistono A, B tali che $\{x\} \delta A$, $\{y\} \ntriangleleft A$ e $\{y\} \delta B$, $\{x\} \ntriangleleft B$
- **T_2 -separato (Hausdorff):** Per ogni $x \neq y$, esistono A, B con $\{x\} \delta A$, $\{y\} \delta B$, e $A \ntriangleleft B$

Teorema: Ogni spazio di prossimità T_2 -separato induce uno spazio topologico di Hausdorff.

Parte III: Topologia Indotta e Compattificazioni

3.1 La Topologia Naturale di uno Spazio di Prossimità

Dato (X, δ) , definiamo la topologia indotta τ_{δ} come segue. Un insieme $F \subseteq X$ è **chiuso** in τ_{δ} se e solo se:

$$\forall x \in X \setminus F: \{x\} \ntriangleleft F$$

Equivalentemente, F è chiuso se $F = cl_{\delta}(F)$.

Gli insiemi **aperti** sono i complementi degli insiemi chiusi:

$$U \text{ è aperto} \Leftrightarrow X \setminus U \text{ è chiuso}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists V \text{ aperto: } x \in V \subseteq U \text{ e } V \ntriangleleft (X \setminus U)$$

Teorema 3.1.1 (Caratterizzazione Completa Regolarità)

Uno spazio topologico (X, τ) deriva da una relazione di prossimità se e solo se è completamente regolare (Tychonoff).

Definizione (Spazio Completamente Regolare): (X, τ) è completamente regolare se è T_1 e per ogni $x \in X$ e ogni chiuso F con $x \notin F$, esiste una funzione continua $f: X \rightarrow [0,1]$ tale che:

$$f(x) = 0 \text{ e } f[F] = \{1\}$$

Direzione ($\Rightarrow$): Data (X, δ) , sia τ_δ la topologia indotta. Per ogni $x \notin F$ chiuso, $\{x\} \triangleleft F$ per definizione. Costruiamo f usando la prossimità:

Per ogni $t \in [0,1]$, definiamo:

$$A_t := \{y \in X : \{y\} \delta (t \cdot F \oplus (1-t) \cdot \{x\})\}$$

dove $\oplus$ denota una "interpolazione" appropriata nella struttura di prossimità.

[La costruzione completa richiede il teorema di estensione di Urysohn generalizzato]

Direzione ($\Leftarrow$): Data (X, τ) completamente regolare, definiamo:

$$A \delta B \Leftrightarrow \text{cl}_\tau(A) \cap \text{cl}_\tau(B) \neq \emptyset$$

Si verifica che questa è una relazione di prossimità e che $\tau_\delta = \tau$. ■

3.2 Il Teorema di Smirnov: Analisi Completa

Teorema 3.2.1 (Compattificazione di Smirnov)

Ogni spazio di prossimità (X, δ) ha un'unica compactificazione di Hausdorff (X^*, i) tale che:

$$A \delta B \Leftrightarrow \text{cl}_{X^*}(i(A)) \cap \text{cl}_{X^*}(i(B)) \neq \emptyset$$

dove $i: X \rightarrow X^*$ è un'immersione densa.

Costruzione di X^* : La compactificazione si costruisce come segue:

1. **Ultrafilters:** Consideriamo l'insieme $U(X)$ di tutti gli ultrafiltri sulla Boolean algebra $P(X)$.

Relazione di Prossimità su Ultrafilters: Per ultrafilters $u, v \in U(X)$, definiamo:

$$u \sim_\delta v \Leftrightarrow \forall A \in u, \forall B \in v: A \delta B$$

2.

3. **Spazio Quoziente:** Definiamo $X^* := U(X) / \sim_\delta$ con la topologia quoziente.

Immersione: Per $x \in X$, sia $u_x := \{A \subseteq X : x \in A\}$ l'ultrafiltro principale. Definiamo:

$$i(x) := [u_x]$$

4.

Unicità: Supponiamo che (Y, j) sia un'altra compattificazione con la proprietà desiderata. Definiamo $\varphi: X^* \rightarrow Y$ come segue: per ogni classe $[u] \in X^*$, sia $\varphi([u])$ l'unico punto in Y tale che per ogni $A \in u$, $\varphi([u]) \in \text{cl}_Y(j(A))$.

Si verifica che φ è ben definita, continua, biettiva, e quindi un omeomorfismo per compattezza di X^* e Hausdorff di Y . ■

Corollario 3.2.2

Ogni spazio di prossimità è omeomorfo a un sottospazio denso di uno spazio compatto di Hausdorff.

3.3 Esempi di Compattificazioni

Esempio 3.3.1 (Compattificazione di Stone-Čech)

Per lo spazio discreto $(\mathbb{N}, \delta_{\text{disc}})$ dove:

$$A \delta_{\text{disc}} B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

la compattificazione di Smirnov coincide con la compattificazione di Stone-Čech $\beta\mathbb{N}$.

Esempio 3.3.2 (Compattificazione a Un Punto)

Per $(\mathbb{R}^n, \delta_{\text{eucl}})$ con la prossimità euclidea standard, la compattificazione è $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, la compattificazione a un punto.

Parte IV: Strutture Uniformi e Prossimità

4.1 Spazi Uniformi: Richiami

Una **struttura uniforme** su X è una collezione $\mathcal{U}$ di sottoinsiemi di $X \times X$ (chiamati intorni della diagonale) che soddisfa:

1. Ogni $U \in \mathcal{U}$ contiene la diagonale $\Delta := \{(x,x) : x \in X\}$
2. Se $U \in \mathcal{U}$ e $U \subseteq V$, allora $V \in \mathcal{U}$
3. Se $U, V \in \mathcal{U}$, allora $U \cap V \in \mathcal{U}$
4. Se $U \in \mathcal{U}$, allora $U^{-1} := \{(y,x) : (x,y) \in U\} \in \mathcal{U}$
5. Se $U \in \mathcal{U}$, esiste $V \in \mathcal{U}$ tale che $V \circ V \subseteq U$, dove $V \circ V := \{(x,z) : \exists y, (x,y) \in V \wedge (y,z) \in V\}$

4.2 Prossimità Indotta da Uniformità

Data una struttura uniforme $\mathcal{U}$ su X , definiamo:

$$A \delta_U B \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}: U[A] \cap B \neq \emptyset$$

dove $U[A] := \{y \in X : \exists x \in A, (x,y) \in U\}$ è l'intorno U di A .

Teorema 4.2.1

δ_U è una relazione di prossimità.

Dimostrazione: Verifichiamo gli assiomi:

- **P1:** Se $A \delta_U B$, allora per $U = \Delta$, $\Delta[A] \cap B = A \cap B \neq \emptyset$. Quindi $A, B \neq \emptyset$.
- **P2:** Supponiamo $A \delta_U B$. Sia $U \in \mathcal{U}$ arbitrario. Per assioma 4 delle uniformità, $U^{-1} \in \mathcal{U}$. Abbiamo $U^{-1}[B] \cap A = \{x \in A : \exists y \in B, (y,x) \in U^{-1}\} = \{x \in A : \exists y \in B, (x,y) \in U\} \neq \emptyset$. Quindi $B \delta_U A$.
- **P3, P4, P5:** Lasciate al lettore come esercizio. ■

4.3 Teorema di Rappresentazione Uniforme

Teorema 4.3.1

Ogni spazio di prossimità (X, δ) ha una struttura uniforme massimale U_δ tale che $\delta = \delta_{\{U_\delta\}}$.

Costruzione: Definiamo:

$$U_\delta := \{U \subseteq X \times X : \forall A, B \subseteq X, A \triangleleft B \Rightarrow U[A] \triangleleft B\}$$

Si verifica che U_δ è una struttura uniforme e che $\delta_{\{U_\delta\}} = \delta$.

4.4 Quasi-Uniformità e Prossimità Direzionale

Una **quasi-uniformità** è una struttura che rilassa l'assioma 4 (simmetria) delle uniformità. Una quasi-uniformità induce una **quasi-prossimità**, una relazione potenzialmente non-simmetrica.

Applicazioni: Le quasi-prossimità sono utili per modellare:

- Accessibilità in grafi diretti
- Flusso di informazione in reti
- Precedenza temporale con tolleranze

Esempio: In un grafo diretto $G = (V, E)$, definiamo:

$$A \delta^{\rightarrow}_G B \Leftrightarrow \exists x \in A, \exists y \in B: \text{esiste un cammino diretto da } x \text{ a } y \text{ di lunghezza } \leq k$$

Questa è una quasi-prossimità ma non è simmetrica se G non è simmetrico.

Parte V: Logiche Modali per la Prossimità

5.1 Sintassi Formale Estesa

Definiamo il linguaggio $L_{\delta+}$ che estende L_{δ} con costrutti aggiuntivi:

$$\varphi ::= \top \mid \perp \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid \Diamond^p\varphi \mid \Box^p\varphi \mid @_x\varphi \mid \exists x.\varphi \mid \forall x.\varphi$$

dove:

- $@_x\varphi$ è l'operatore di soddisfazione nominale ("φ è vero al punto nominato x")
- $\exists x.\varphi$ e $\forall x.\varphi$ sono quantificatori su punti

5.2 Semantica di Kripke per Prossimità

Un **modello di prossimità esteso** è una tupla $M = (X, \delta, \{R_x\}_{x \in N}, V)$ dove:

- X è un insieme di stati/punti
- δ è una relazione di prossimità su $P(X)$
- N è un insieme di nominali
- $R_x: X \rightarrow X$ assegna ad ogni nominale x un punto specifico
- $V: \text{Prop} \rightarrow P(X)$ è la funzione di valutazione

Le condizioni di verità sono:

$$\begin{aligned} M, w \models p &\Leftrightarrow w \in V(p) \\ M, w \models \neg\varphi &\Leftrightarrow \text{not } M, w \models \varphi \\ M, w \models \varphi \wedge \psi &\Leftrightarrow M, w \models \varphi \text{ and } M, w \models \psi \\ M, w \models \Diamond^p\varphi &\Leftrightarrow \exists U \text{ aperto contenente } w: U \delta [[\varphi]]_M \\ M, w \models \Box^p\varphi &\Leftrightarrow \forall U \text{ aperto contenente } w: U \triangleleft [[\varphi]]_M \\ M, w \models @_x\varphi &\Leftrightarrow M, R_x(w) \models \varphi \\ M, w \models \exists x.\varphi &\Leftrightarrow \exists v \in X: M[x \mapsto v], w \models \varphi \\ M, w \models \forall x.\varphi &\Leftrightarrow \forall v \in X: M[x \mapsto v], w \models \varphi \end{aligned}$$

5.3 Sistema Assiomatico di Hilbert Completo

Presentiamo il sistema **PL** (Proximity Logic):

Assiomi Proposizionali:

- (TAUT) Tutti i tautologie proposizionali
- (MP) $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$

Assiomi della Prossimità:

- (K_δ) $\Box^P(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box^P\varphi \rightarrow \Box^P\psi)$
- (Dual) $\Diamond^P\varphi \leftrightarrow \neg\Box^P\neg\varphi$
- (Sym) $\Diamond^P\varphi \rightarrow \Diamond^P\Diamond^P\varphi$
- (Trans_w) $\Diamond^P\Diamond^P\varphi \rightarrow \Diamond^P\varphi$
- (Sep) $\varphi \rightarrow \Diamond^P\varphi$
- (Add) $\Diamond^P(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond^P\varphi \vee \Diamond^P\psi)$
- (Mon) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Diamond^P\varphi \rightarrow \Diamond^P\psi)$

Regole di Inferenza:

- (Nec) Se $\vdash \varphi$, allora $\vdash \Box^P\varphi$
- (RN) Se $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, allora $\vdash \Diamond^P\varphi \rightarrow \Diamond^P\psi$

Teorema 5.3.1 (Soundness)

Se $PL \vdash \varphi$, allora φ è valida in tutti i modelli di prossimità.

Dimostrazione: Per induzione sulla lunghezza della derivazione. Casi base: verifichiamo che ogni assioma è valido. Casi induttivi: verifichiamo che le regole preservano validità. ■

Teorema 5.3.2 (Completezza Forte)

Se φ è valida in tutti i modelli di prossimità, allora $PL \vdash \varphi$.

Dimostrazione (Schema): Usiamo il metodo del modello canonico.

1. **Modello Canonico:** Definiamo $M^c = (X^c, \delta^c, V^c)$ dove:
 - $X^c := \{\Gamma : \Gamma \text{ è un insieme massimale PL-consistente di formule}\}$
 - $\Gamma \delta^c \Delta \Leftrightarrow \{\varphi : \Diamond^P\varphi \in \Gamma\} \cap \Delta \neq \emptyset$
 - $V^c(p) := \{\Gamma : p \in \Gamma\}$

Lemma della Verità: Per ogni formula φ e ogni $\Gamma \in X^c$:

$$M^c, \Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma$$

2. Dimostrato per induzione sulla struttura di φ .
3. **Consistenza implica Soddisfacibilità:** Se φ è PL-consistente, esiste Γ massimale consistente con $\varphi \in \Gamma$. Quindi $M^c, \Gamma \models \varphi$.
4. **Conclusione:** Se $\not\models \varphi$, allora $\neg\varphi$ è consistente, quindi soddisfacibile. Quindi φ non è valida. Contrapponendo, se φ è valida, allora $\vdash \varphi$. ■

5.4 Frammenti Decidibili

Teorema 5.4.1

Il frammento modale puro (senza quantificatori) di PL è decidibile e PSPACE-completo.

Upper Bound: Algoritmo basato su tableaux con at most exponentially many branch.

Lower Bound: Riduzione da QBF (Quantified Boolean Formulas).

Teorema 5.4.2

Il frammento del primo ordine $\exists x \forall y. \phi(x, y)$ dove ϕ è modal-free è indecidibile.

Dimostrazione: Riduzione dal problema della validità della logica del primo ordine. ■

Parte VI: Prossimità Discreta e Algoritmi

6.1 Grafi di Prossimità

Dato un grafo non diretto $G = (V, E)$, definiamo la prossimità di ordine 1:

$$A \delta_1 B \Leftrightarrow \exists v \in A, \exists w \in B: (v, w) \in E$$

Più generalmente, la prossimità di ordine k :

$$A \delta_k B \Leftrightarrow \exists v \in A, \exists w \in B: \text{dist}_G(v, w) \leq k$$

dove dist_G è la distanza di cammino in G .

6.2 Calcolo della Chiusura di Prossimità

Input: Grafo $G = (V, E)$, insieme $A \subseteq V$, parametro k **Output:** $\text{cl}_{\delta_k}(A) = \{v \in V : \{v\} \delta_k A\}$

Algoritmo BFS-Proximity:

procedure ProximityClosure(G, A, k):

closure $\leftarrow A$

frontier $\leftarrow A$

for i from 1 to k :

next_frontier $\leftarrow \emptyset$

for each v in frontier:

for each w adjacent to v :

if $w \notin \text{closure}$:

closure $\leftarrow \text{closure} \cup \{w\}$

next_frontier $\leftarrow \text{next_frontier} \cup \{w\}$

frontier $\leftarrow \text{next_frontier}$

return closure

Complessità: $O(k \cdot (|V| + |E|))$

6.3 Soddisfacibilità in Modelli Finiti

Problema: Data una formula $\varphi \in L_\delta$ e un grafo G , determinare se esiste $v \in V$ tale che $M_G, v \models \varphi$, dove M_G è il modello naturale indotto da G .

Teorema 6.3.1: Il problema è NP-completo.

Proof sketch:

- **NP:** Indovina un'assegnazione di variabili proposizionali e un punto v , verifica in tempo polinomiale.
- **NP-hard:** Riduzione da 3-SAT tramite encoding di clausole come vincoli di prossimità.

Parte VII: Estensioni Probabilistiche e Fuzzy

7.1 Prossimità Probabilistica

Una **prossimità probabilistica** su uno spazio di probabilità (X, Σ, P) è una famiglia di relazioni $\{\delta_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ tale che:

1. $\delta_\alpha \subseteq \delta_\beta$ se $\alpha > \beta$ (monotonia)
2. Per ogni A, B , la funzione $\alpha \mapsto \mathbb{1}(A \delta_\alpha B)$ è decrescente
3. $\bigcap_{\alpha < 1} \delta_\alpha = \delta_1$ (continuità)

L'interpretazione: $A \delta_\alpha B$ significa "A è prossimo a B con confidenza almeno α ".

Semantica Bayesiana: Data una distribuzione a priori P su spazi di prossimità, possiamo definire:

$$P(A \delta B \mid E) = \int_{\{(X, \delta) \in \text{Spaces}\}} \mathbb{1}(A \delta B) \cdot P((X, \delta) \mid E) d\mu$$

7.2 Prossimità Fuzzy

Una **prossimità fuzzy** è una funzione $\mu_\delta: P(X) \times P(X) \rightarrow [0,1]$ che soddisfa versioni fuzzy degli assiomi di prossimità:

FP1 (Non-degenerazione Fuzzy):

$$\mu_\delta(A, B) > 0 \Rightarrow (A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset)$$

FP2 (Simmetria Fuzzy):

$$\mu_{\delta}(A, B) = \mu_{\delta}(B, A)$$

FP3 (Additività Fuzzy):

$$\mu_{\delta}(A, B \cup C) \leq \max(\mu_{\delta}(A, B), \mu_{\delta}(A, C))$$

FP4 (Intersezione Fuzzy):

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \mu_{\delta}(A, B) = 1$$

FP5 (Monotonia Fuzzy):

$$(A \subseteq A') \wedge (B \subseteq B') \Rightarrow \mu_{\delta}(A, B) \leq \mu_{\delta}(A', B')$$

Esempio 7.2.1 (Prossimità Gaussiana)

In $\mathbb{R}^n$ con metrica euclidea, definiamo:

$$\mu_{\delta}(A, B) = \sup_{\{a \in A, b \in B\}} \exp(-||a - b||^2 / 2\sigma^2)$$

Questa prossimità fuzzy assegna valore 1 a insiemi che si intersecano e valori decrescenti esponenzialmente con la distanza minima.

7.3 Logica Modale Fuzzy per Prossimità

Estendiamo il linguaggio L_{δ} a $L_{\delta}^{\text{fuzzy}}$ dove le formule hanno valori di verità in $[0, 1]$.

La semantica dell'operatore $\Diamond^p$ diventa:

$$[[\Diamond^p \phi]](x) = \inf_{\{U \in \mathcal{U}(x)\}} \mu_{\delta}(U, [[\phi]])$$

dove $\mathcal{U}(x)$ è la famiglia degli intorni di x e $[[\phi]]$ è l'estensione fuzzy di ϕ .

Assiomi Fuzzy: Il sistema usa la logica di Łukasiewicz come base proposizionale con:

- (FL1) $[[\Diamond^p(\phi \oplus \psi)]] \geq [[\Diamond^p \phi]] \oplus [[\Diamond^p \psi]]$ (dove $\oplus$ è la t-conorm)
- (FL2) $[[\Diamond^p \phi]] \geq [[\phi]]$ (riflessività fuzzy)
- (FL3) $[[\Diamond^p \phi]] = [[\Diamond^p \Diamond^p \phi]]$ (idempotenza fuzzy)

Parte VIII: Applicazioni Avanzate

8.1 Ragionamento Spaziale Qualitativo

8.1.1 Configurazioni di Oggetti

Consideriamo uno scenario con n oggetti $\{O_1, O_2, \dots, O_n\}$ in uno spazio. Rappresentiamo la conoscenza come un insieme di vincoli di prossimità:

Knowledge Base:

```
KB = {
  O1 δ O2,
  O2 δ O3,
  O1 < O4,
  O3 δ O4
}
```

Problema di Inferenza: Possiamo dedurre $O_1 \delta O_3$?

Soluzione: Usando la transitività debole ($\Diamond^p \Diamond^p \phi \rightarrow \Diamond^p \phi$) e le proprietà della prossimità, possiamo costruire una **catena di prossimità**:

$$O_1 \delta O_2 \wedge O_2 \delta O_3 \Rightarrow O_1 \delta_2 O_3$$

dove δ_2 è la prossimità di ordine 2 (prossimità transitiva).

8.1.2 Algoritmo di Propagazione dei Vincoli

Input: Insieme di vincoli $C = \{(A_i \delta B_i), (C_i < D_i)\}$ **Output:** Chiusura dei vincoli sotto le regole di inferenza

```
def propagate_proximity_constraints(objects, constraints):
```

```
    proximity_graph = build_graph(objects, constraints)
```

```
    closure = set(constraints)
```

```
    changed = True
```

```
    while changed:
```

```
        changed = False
```

```
        for (A, B) in closure:
```

```
            for (B', C) in closure:
```

```
                if B == B' and (A, C) not in closure:
```

```
                    # Transitività:  $A \delta B \wedge B \delta C \Rightarrow A \delta_2 C$ 
```

```
                    closure.add((A, C, order=2))
```

```
                    changed = True
```

```
    # Contraddizione:  $A \delta B \wedge A < B$ 
```

```
    for (A, B) in positive_constraints(closure):
```

```
        if (A, B) in negative_constraints(closure):
```

```
            return "INCONSISTENT"
```

return closure

Complessità: $O(n^3)$ dove n è il numero di oggetti.

8.2 Visione Artificiale e Segmentazione di Immagini

8.2.1 Prossimità di Regioni in Immagini

Data un'immagine digitale $I: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (RGB), definiamo regioni $R_1, R_2, \dots, R_k$ tramite segmentazione.

Prossimità Percettiva:

$$\mu_{\delta}(R_i, R_j) = w_1 \cdot \mu_{\text{spaziale}}(R_i, R_j) + w_2 \cdot \mu_{\text{colore}}(R_i, R_j) + w_3 \cdot \mu_{\text{texture}}(R_i, R_j)$$

dove:

- μ_{spaziale} misura la vicinanza geometrica dei bordi
- μ_{colore} misura la similarità cromatica
- μ_{texture} misura la similarità di pattern

8.2.2 Operatore di Dilatazione di Prossimità

Definiamo l'**operatore di dilatazione**:

$$\text{Dilate}_{\delta}(R, k) = \{x \in I : \{x\} \delta \subseteq R\}$$

Questo generalizza la dilatazione morfologica classica permettendo dilatazioni "soft" basate su prossimità graduata.

Applicazione: Region growing con tolleranze:

```
def proximity_region_growing(image, seed, threshold):
```

```
    region = {seed}
```

```
    frontier = {seed}
```

```
    while frontier:
```

```
        new_frontier = set()
```

```
        for pixel in frontier:
```

```
            neighbors = get_neighbors(pixel)
```

```
            for n in neighbors:
```

```
                if n not in region:
```

```
                    if proximity_degree(region, {n}) > threshold:
```

```
                        region.add(n)
```

```
                        new_frontier.add(n)
```

```
        frontier = new_frontier
```

return region

8.3 Sistemi Multi-Agente e Coordinazione Spaziale

8.3.1 Logica Epistemica di Prossimità

Estendiamo L_{δ} con operatori epistemici K_i per ogni agente i :

Linguaggio L_{δ}^K :

$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Diamond^p\varphi \mid K_i\varphi \mid C_G\varphi \mid D_G\varphi$

dove:

- $K_i\varphi$: "l'agente i sa che φ "
- $C_G\varphi$: "è conoscenza comune nel gruppo G che φ "
- $D_G\varphi$: "è conoscenza distribuita nel gruppo G che φ "

Semantica: Un modello è $M = (X, \delta, \{\sim_i\}_{i \in \text{Agents}}, V)$ dove $\sim_i$ è una relazione di equivalenza epistemica per l'agente i .

$M, w \models K_i\varphi \Leftrightarrow \forall v: w \sim_i v \Rightarrow M, v \models \varphi$

$M, w \models \Diamond^p\varphi \wedge K_i\psi \Leftrightarrow (M, w \models \Diamond^p\varphi) \wedge (M, w \models K_i\psi)$

8.3.2 Protocollo di Rendez-vous con Prossimità

Problema: n agenti devono incontrarsi in una regione senza conoscere le posizioni esatte, ma solo relazioni di prossimità.

Protocollo:

1. Ogni agente i trasmette la sua posizione approssimativa P_i

Gli agenti calcolano una regione target T tale che:

$\forall i: P_i \delta \square T$ (ogni agente è k -prossimo a T)

- 2.

Gli agenti si muovono verso T usando:

$\text{move}(i) = \arg \min_{\{d \in \text{Directions}\}} \text{distance}(P_i + d, T)$

- 3.

Teorema 8.3.1: Se lo spazio è connesso e gli agenti si muovono secondo il protocollo, si incontrano in tempo $O(k \cdot \text{diam}(X))$.

8.4 Biologia Computazionale: Prossimità Molecolare

8.4.1 Interazioni Proteina-Proteina

Modelliamo proteine come grafi 3D dove:

- Vertici = amminoacidi
- Archi = legami chimici o vicinanza spaziale ($< 5\text{\AA}$)

Prossimità di Binding:

$$\mu_{\text{binding}}(P_1, P_2) = \sum_{\{a \in P_1, b \in P_2\}} w(a,b) \cdot \exp(-\text{dist}(a,b)/r_0)$$

dove $w(a,b)$ è un peso che dipende dalle proprietà chimiche di a e b .

Predizione di Interazioni: Due proteine interagiscono se:

$$\mu_{\text{binding}}(P_1, P_2) > \theta \wedge \exists R_1 \subset P_1, R_2 \subset P_2: R_1 \delta_{\text{geometric}} R_2$$

dove R_1, R_2 sono regioni di binding candidate.

8.4.2 Clustering Spaziale di Espressione Genica

Dato un atlante spaziale di espressione genica (spatial transcriptomics), raggruppiamo cellule con espressione simile e prossime spazialmente:

```
def spatial_gene_clustering(cells, expression_data, k_neighbors):
    proximity = compute_spatial_proximity(cells, k_neighbors)
    similarity = compute_expression_similarity(expression_data)

    # Clustering con vincoli di prossimità
    clusters = []
    for seed in cells:
        cluster = {seed}
        candidates = [c for c in cells if proximity[seed, c] > 0]
        for c in sorted(candidates, key=lambda x: similarity[seed, x]):
            if similarity[seed, c] > \theta and all(proximity[c, m] > 0 for m in cluster):
                cluster.add(c)
        clusters.append(cluster)

    return merge_overlapping_clusters(clusters)
```

8.5 Reti Sociali e Prossimità Relazionale

8.5.1 Prossimità Multi-Livello

In una rete sociale $G = (V, E)$, definiamo:

Prossimità Topologica:

$$\delta_{\text{topo}}(u, v) \Leftrightarrow \text{dist}_G(u, v) \leq k$$

Prossimità di Interesse:

$$\mu_{\text{interest}}(u, v) = |\text{Interests}(u) \cap \text{Interests}(v)| / |\text{Interests}(u) \cup \text{Interests}(v)|$$

Prossimità Composita:

$$\mu_{\text{social}}(u, v) = \alpha \cdot \mathbb{1}(\delta_{\text{topo}}(u, v)) + \beta \cdot \mu_{\text{interest}}(u, v) + \gamma \cdot \mu_{\text{influence}}(u, v)$$

8.5.2 Diffusione dell'Informazione con Prossimità

Modello: Un'informazione si propaga da u a v con probabilità:

$$P(u \rightarrow v) = \mu_{\text{social}}(u, v) \cdot (1 - \sum_{w \in N(v) \setminus \{u\}} \mu_{\text{social}}(w, v) \cdot I_w)$$

dove I_w è l'indicatore che w ha già l'informazione.

Teorema 8.5.1: Se il grafo sociale è connesso e μ_{social} definisce una prossimità genuina, l'informazione raggiunge tutti i nodi con probabilità 1 in tempo atteso $O(n \log n)$.

Parte IX: Teoria della Misura e Prossimità

9.1 Spazi di Misura con Prossimità

Sia (X, Σ, μ) uno spazio di misura. Definiamo una **prossimità misurabile**:

$$A \delta_{\mu, \varepsilon} B \Leftrightarrow \mu(\{x \in X : \text{dist}(x, A) < \varepsilon \wedge \text{dist}(x, B) < \varepsilon\}) > 0$$

Questa prossimità dipende da un parametro $\varepsilon > 0$ che rappresenta la "scala" di vicinanza.

Teorema 9.1.1

Per ogni $\varepsilon > 0$, $\delta_{\mu, \varepsilon}$ è una relazione di prossimità.

Dimostrazione:

- **P1:** Se $\mu(\dots) > 0$, allora l'insieme in questione è non vuoto, quindi $A, B \neq \emptyset$.
- **P2:** La condizione è simmetrica in A e B .
- **P3:** Supponiamo $A \delta_{\mu, \varepsilon} (B \cup C)$. Allora esiste un insieme di misura positiva di punti vicini sia ad A che a $B \cup C$. Ogni tale punto è vicino a B o a C , quindi per proprietà della misura, $A \delta_{\mu, \varepsilon} B$ o $A \delta_{\mu, \varepsilon} C$.
- **P4, P5:** Verifiche dirette. **■**

9.2 Prossimità Hausdorff Generalizzata

La **distanza di Hausdorff** tra insiemi compatti è:

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\}$$

Definiamo la **prossimità di Hausdorff**:

$$A \delta_{H, \varepsilon} B \Leftrightarrow d_H(A, B) < \varepsilon$$

Questa è una prossimità parametrica che diventa più fine al diminuire di ε .

Teorema 9.2.1 (Convergenza in Prossimità di Hausdorff)

Una sequenza di insiemi compatti $\{A_n\}$ converge ad A nella topologia di Hausdorff se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N: \forall n \geq N, A_n \delta_{H, \varepsilon} A$$

9.3 Integrali di Prossimità

Definiamo l'**integrale di prossimità** per funzioni $f: X \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_A f d\mu := \inf_{B: A \delta B} \int_B f d\mu$$

Questo rappresenta il valore integrale "approssimativamente su A " considerando tutte le regioni prossime ad A .

Proprietà:

1. Monotonia: Se $A \subseteq A'$, allora $\int_A f d\mu \leq \int_{A'} f d\mu$
2. Additività approssimata: $\int_{A \cup B} f d\mu \approx \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$ se $A \triangleleft B$
3. Convergenza: Se $A_n \rightarrow A$ in prossimità, allora $\int_{A_n} f d\mu \rightarrow \int_A f d\mu$

Parte X: Prossimità Temporale e Dinamica

10.1 Logica Temporale di Prossimità

Estendiamo L_δ con operatori temporali:

Linguaggio L_{δ}^T :

$$\varphi ::= p \mid \neg \varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Diamond \varphi \mid \bigcirc \varphi \mid \varphi \cup \psi \mid \varphi S \psi$$

dove:

- $\bigcirc\varphi$: "al prossimo istante φ "
- $\varphi \cup \psi$: " φ finché ψ " (until)
- $\varphi \text{ S } \psi$: " φ da quando ψ " (since)

Modelli: $M = (T, <, \{X_\square, \delta_\square\}_{\square \in T}, V)$ dove:

- $(T, <)$ è un ordine temporale
- $(X_\square, \delta_\square)$ è uno spazio di prossimità per ogni istante t
- $V: \text{Prop} \rightarrow (T \rightarrow P(X_\square))$ assegna estensioni temporali alle proposizioni

Semantica:

$M, t, x \models \bigcirc\varphi \Leftrightarrow \exists t' > t: t' \text{ è il successore immediato di } t \wedge M, t', x \models \varphi$

$M, t, x \models \varphi \cup \psi \Leftrightarrow \exists t' \geq t: M, t', x \models \psi \wedge \forall t'' \in [t, t'): M, t'', x \models \varphi$

$M, t, x \models \Diamond^p\varphi \Leftrightarrow \forall U \text{ aperto in } X_\square \text{ contenente } x: U \cap \delta_\square[[\varphi]]_{\{M, t\}} \neq \emptyset$

10.2 Evoluzione di Spazi di Prossimità

Un **sistema dinamico di prossimità** è una famiglia $\{(X, \delta_\square)\}_{\square \in \mathbb{R}}$ dove $\delta_\square$ evolve nel tempo secondo:

$$d/dt \delta_\square(A, B) = F(\delta_\square, A, B, t)$$

Esempio 10.2.1 (Diffusione di Prossimità): In un sistema diffusivo:

$$\partial_t \mu_\delta(A, B) = D \cdot \nabla^2 \mu_\delta(A, B) + \text{source}(A, B, t)$$

dove D è il coefficiente di diffusione e source rappresenta creazione/annichilazione di prossimità.

10.3 Attrattori di Prossimità

In un sistema dinamico discreto $\varphi: X \rightarrow X$, definiamo:

Insieme Limite di Prossimità:

$$\bigwedge_\delta(x) = \{y \in X : \forall k \exists n > k: \{\varphi^n(x)\} \delta \{y\}\}$$

Teorema 10.3.1: Se X è compatto e δ è continua rispetto alla topologia indotta, allora $\bigwedge_\delta(x) \neq \emptyset$.

Attrattore di Prossimità: Un insieme A è un attrattore di prossimità se:

1. A è δ -chiuso: $A = \text{cl}_\delta(A)$
 2. Esiste un intorno U di A tale che $\bigcap_\delta(x) \subseteq A$ per ogni $x \in U$
-

Parte XI: Teoria dei Giochi con Prossimità

11.1 Giochi di Posizionamento Spaziale

Setup: n giocatori scelgono posizioni in uno spazio (X, δ) . Il payoff del giocatore i dipende dalla prossimità agli altri:

$$u_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j \neq i} w_{ij} \cdot \mu_\delta(\{x_i\}, \{x_j\}) - \text{cost}(x_i)$$

Equilibrio di Nash di Prossimità: Una configurazione $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ è un equilibrio se:

$$\forall i, \forall x_i \in X: u_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \geq u_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$$

Teorema 11.1.1 (Esistenza)

Se X è compatto, δ è continua, e le funzioni u_i sono continue, allora esiste un equilibrio di Nash di prossimità.

Dimostrazione: Applicazione del teorema del punto fisso di Kakutani alla corrispondenza di best response. ■

11.2 Coalizioni Spaziali

Definizione: Una **coalizione spaziale** è un insieme $S \subseteq N$ di giocatori con la proprietà:

$$\forall i, j \in S, \exists k_1, \dots, k_m \in S: i = k_1, j = k_m, \forall l: \{x_{k_l}\} \delta \{x_{k_{l+1}}\}$$

Ossia, i membri di una coalizione sono collegati da una catena di prossimità.

Valore di Shapley con Prossimità:

$$\Phi_i(v, \delta) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} w_\delta(S, i) \cdot (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

dove $w_\delta(S, i)$ dipende dalla prossimità di i ai membri di S :

$$w_\delta(S, i) = (1/n) \cdot \mu_\delta(\{x_i\}, \bigcup_{j \in S} \{x_j\})$$

Parte XII: Teoria delle Categorie e Prossimità

12.1 Categoria PROX

Definiamo la categoria **PROX**:

- **Oggetti:** Spazi di prossimità (X, δ)

Morfismi: Funzioni δ -continue $f: (X, \delta_X) \rightarrow (Y, \delta_Y)$, dove f è δ -continua se:
 $A \delta_X B \Rightarrow f(A) \delta_Y f(B)$

-

Teorema 12.1.1

PROX è una categoria concreta sopra Set.

Funtore di Dimenticanza: $U: \text{PROX} \rightarrow \text{Set}$ che dimentica la struttura di prossimità.

Funtore Libero: $F: \text{Set} \rightarrow \text{PROX}$ assegna ad ogni insieme X la prossimità discreta δ_{disc} .

Teorema 12.1.2 (Aggiunzione)

$F \dashv U$, ossia F è aggiunto sinistro di U .

12.2 Prodotti e Coprodotti in PROX

Prodotto: Dati (X, δ_X) e (Y, δ_Y) , il prodotto in PROX è $(X \times Y, \delta_{X \times Y})$ dove:

$$(A_1 \times B_1) \delta_{X \times Y} (A_2 \times B_2) \Leftrightarrow A_1 \delta_X A_2 \wedge B_1 \delta_Y B_2$$

Coprodotto: Il coprodotto è l'unione disgiunta $(X \sqcup Y, \delta_{\sqcup})$ dove:

$$A \delta_{\sqcup} B \Leftrightarrow (A, B \subseteq X \wedge A \delta_X B) \vee (A, B \subseteq Y \wedge A \delta_Y B)$$

12.3 Limiti e Colimiti

Teorema 12.3.1

PROX ha tutti i limiti e colimiti finiti.

Equalizzatore: Dati $f, g: (X, \delta_X) \rightarrow (Y, \delta_Y)$, l'equalizzatore è:

$$\text{eq}(f, g) = (\{x \in X : f(x) = g(x)\}, \delta_X|_{\text{eq}})$$

Coequalizzatore: Il coequalizzatore è più complesso e richiede la costruzione di una relazione di equivalenza compatibile con δ .

Parte XIII: Complessità Descrittiva

13.1 Gerarchia Polinomiale per Prossimità

Definiamo classi di complessità per problemi di prossimità:

PROX-P: Problemi decidibili in tempo polinomiale su modelli di prossimità finiti rappresentati esplicitamente.

PROX-NP: Problemi verificabili in tempo polinomiale con un certificato polinomiale.

PROX-PSPACE: Problemi decidibili in spazio polinomiale.

Teorema 13.1.1

Il problema di soddisfacibilità per L_{δ} è PROX-PSPACE-completo.

Dimostrazione: Simile alla prova per la logica modale classica, ma con considerazioni aggiuntive per la struttura di prossimità. ■

13.2 Descrittività di Frammenti

FO(δ): Logica del primo ordine con predicato di prossimità $\delta(\cdot, \cdot)$.

SO(δ): Logica del secondo ordine con quantificazione su insiemi e prossimità.

Teorema 13.2.1 (Limitazione Espressiva)

FO(δ) non può esprimere "esistono infiniti insiemi a due a due prossimi" su modelli infiniti.

Dimostrazione: Per compattezza, se la formula fosse esprimibile, avrebbe modelli finiti arbitrariamente grandi con la proprietà, ma questo contraddice limiti combinatorici. ■

Parte XIV: Applicazioni in Fisica Teorica

14.1 Prossimità in Teoria Quantistica dei Campi

In QFT, la località è cruciale. Definiamo una **prossimità causale**:

$$A \delta_{\text{causal}} B \Leftrightarrow \exists x \in A, y \in B: (x - y)^2 \leq 0$$

dove $(x - y)^2$ è l'intervallo spaziotemporale di Minkowski.

Commutatori di Campi: Per operatori di campo $\phi(x)$, $\psi(y)$:

$\{x\} \delta_{\text{causal}} \{y\} \Rightarrow [\varphi(x), \psi(y)] \neq 0$ (possibile non-commutazione)

$\{x\} \triangleleft_{\text{causal}} \{y\} \Rightarrow [\varphi(x), \psi(y)] = 0$ (località)

14.2 Entropia di Prossimità

Definiamo l'**entropia di prossimità** per una partizione $\{A_1, \dots, A_n\}$ di X :

$$H_{\delta}(\{A_i\}) = -\sum_i p_i \log p_i + \lambda \cdot \sum_{\{i \neq j\}} \mu_{\delta}(A_i, A_j)$$

dove $p_i = \mu(A_i)$ e λ è un parametro che bilancia entropia e prossimità.

Principio di Massima Entropia di Prossimità: La configurazione ottimale massimizza H_{δ} soggetta a vincoli.